

Prova scritta del concorso a n. 3 borse di studio per la Matematica
Collegio delle Scienze "Luciano Fonda"

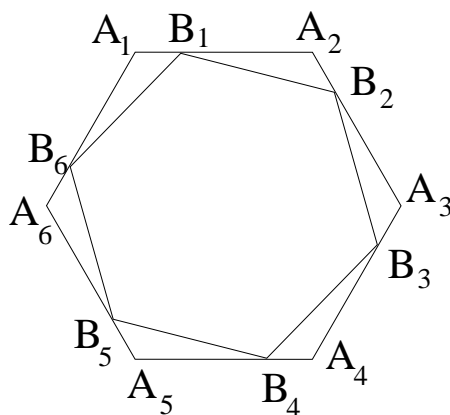
Anno Accademico 2005/06

Trieste, 12 settembre 2005

Tema 2

1) Si consideri su ciascuno dei lati $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ dell'esagono regolare A_1, \dots, A_6 di lato l , un punto B_1, B_2, \dots, B_6 (vedi figura) in modo che $A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_6B_6 = a$.

Si trovi a in modo tale che il perimetro dell'esagono B_1, \dots, B_6 sia $i \frac{\sqrt{3}}{2}$ di quello di A_1, \dots, A_6 .

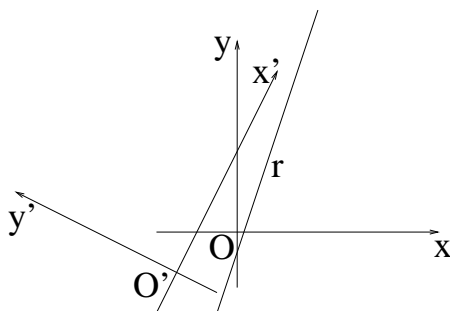


2) Calcolare il resto della divisione di 5^{300} per 11.

3) In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali O, x, y si consideri la retta r di equazione $y = 3x - 1$.

Si consideri poi il sistema di coordinate cartesiane ortogonali O', x', y' tale che O' è il punto di coordinate $(-3, -2)$ e gli assi x', y' formano con gli assi x, y un angolo di 60° , orientati come in figura.

Si scriva quindi l'equazione della retta r nel nuovo sistema di coordinate.



4) Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$x^{\log(x^2-3x+3)} = 1.$$

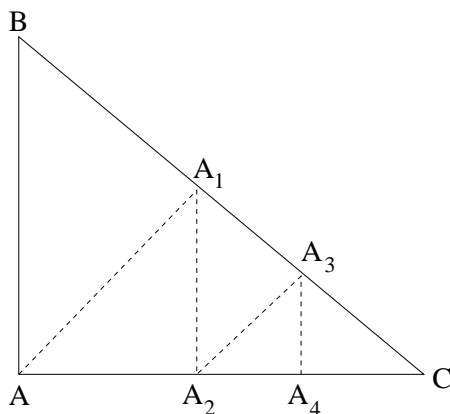
5) Si consideri il triangolo rettangolo ABC , con angolo retto in A e angolo in C di 45° .

Si consideri poi il piede A_1 dell'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa (vedi figura). Si è così costruito il triangolo AA_1C .

Si ripeta questo procedimento a partire dal punto A_1 , ottenendo così via via i punti A_2, A_3 , etc. Per completezza si ponga $A_0 = A$.

Calcolare poi (in funzione di $n \geq 1$) il rapporto tra l'area del triangolo $A_{n-1}A_nC$ e quella del triangolo ABC .

Per quali n si avrà che il rapporto tra il segmento A_nC ed il segmento AC è $< 10^{-2}$?



6) Dire per quali valori reali di x è definita la seguente espressione:

$$\frac{\log_2(x-1)}{\sqrt{2-\log_2 x}}$$

7) Si enuncino i criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli. Si generalizzino (alcuni di) questi criteri al caso dei quadrilateri specificando quali continuino a valere.