

**Prova scritta del concorso a n. 3 borse di studio per la Matematica
Collegio delle Scienze “Luciano Fonda”**

Anno Accademico 2006/07

Trieste, 11 settembre 2006

Tema 2

1. Provare che esistono infiniti numeri $n \in \mathbb{N}$ tali che $n^2 + 5n + 7$ è divisibile per 13.
2. Una moneta è truccata, cioè le sue due facce “testa” e “croce” si presentano con probabilità diverse, ma non nulle. Lanciando la moneta due volte, la probabilità di ottenere due “teste” è il doppio della probabilità di ottenere due facce diverse. Calcolare la probabilità di ottenere due “croci” in due lanci.
3. Si consideri il numero $0,\bar{3} = 0,333\dots$ in base *cinque*. Scrivere tale numero nella forma $\frac{a}{b}$ con a e b interi, primi tra loro ed espressi sempre in base *cinque*.
4. Si consideri in un sistema cartesiano ortogonale $O(x, y, z)$ dello spazio la simmetria rispetto all'asse z . In cosa viene trasformato da tale simmetria il segmento di estremi $A = (3, 5, 0)$ e $B = (-7, 1, 4)$?
5. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (x + y)^{x+3y} = 1 \\ (x - 2y)^{x-y} = 1 \end{cases}$$

6. Dire se le seguenti due equazioni:

$$\log_8[x(x+2)] = 1 \quad \text{e} \quad \log_8 x + \log_8(x+2) = 1$$

hanno le stesse soluzioni. Motivare la risposta.

7. Esporre il teorema di Pitagora e alcune sue applicazioni.