

**Prova scritta del concorso a n. 3 borse di studio per la Matematica  
Collegio delle Scienze "Luciano Fonda"**

Anno Accademico 2007/2008

Trieste, 10 settembre 2007

**Tema 1**

1. Si risolva il seguente sistema, dopo averne dato una interpretazione geometrica,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 28x + 26 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

2. Un ladro ha rubato un telefono cellulare, che sfortunatamente per lui ha le funzioni bloccate. Per sbloccarlo è necessario inserire un codice segreto formato da cinque cifre. Il ladro sa che il codice contiene un 5 e un 9 collocati nei primi tre posti e sa ancora che le altre tre cifre sono tutte diverse fra loro e diverse da 5 e da 9. Si dica, giustificando la risposta, quanti sono i tentativi che al più il ladro dovrà fare per sbloccare il telefono.
3. Due vasi contengono sia caramelle alla liquirizia sia alla menta. Il primo vaso contiene metà delle caramelle del secondo e inoltre il 75% delle caramelle del primo vaso sono alla liquirizia. Se il numero totale delle caramelle alla menta coincide con quello delle caramelle alla liquirizia diminuito di 10 e nel secondo vaso ci sono 120 caramelle alla menta, si dica, giustificando la risposta, quante caramelle alla liquirizia contiene il primo vaso.
4. Per ogni numero reale  $x$  si indichi con  $M(x)$  il massimo tra i numeri  $2x$ ,  $1 - 3x$  e  $2 - x$ . Si determini, giustificando la risposta, il minimo valore di  $M(x)$ .
5. Si provi che l'equazione  $x^2 + 390405582635x - 390405582619 = 0$  ha due soluzioni reali  $\alpha, \beta$  tali che  $\alpha < 0 < \beta$  e  $-\alpha > \beta$ .
6. Si determinino, giustificando la risposta, le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \geq \sqrt{\frac{x-3}{x-5}}.$$

7. Quattro punti dello spazio  $A, B, C$  e  $D$  soddisfano le seguenti condizioni:  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $DC = 2\sqrt{3}$ ,  $AB = 3$  e  $AD = 2$ . Si dica, giustificando la risposta, qual è la minima distanza possibile che può avere il punto  $B$  dal punto  $D$ .
8. Fissati nel piano un cerchio  $\mathcal{C}$  e una retta  $r$  che interseca  $\mathcal{C}$  in due punti distinti, si descriva il luogo dei punti del piano equidistanti da  $\mathcal{C}$  e da  $r$ .
9. Si espongano le principali proprietà dei triangoli rettangoli.